

СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ  
С НАРУШЕНИЕМ  $CP$  ИНВАРИАНТНОСТИ.  
2. ПАРНОЕ РОЖДЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНЫХ  
БОЗОНОВ ХИГГСА НА ЛНС

© 2003 М.В. Долгополов,<sup>1</sup> М.Н. Дубинин,<sup>2</sup> И.А. Смирнов,<sup>3</sup>  
Ю.П. Филиппов<sup>1</sup>

Вычислено в ведущем однопетлевом приближении дифференциальное сечение парного рождения легчайших нейтральных бозонов Хиггса в глюон-глюонном взаимодействии в рамках общей двухдублетной модели хиггсовского сектора (THDM). Проведен сравнительный анализ с аналогичными результатами, полученными в рамках минимальной суперсимметричной стандартной модели (MSSM). Показано, что в определенных областях пространства параметров значения дифференциальных сечений, полученные в рамках моделей THDM и MSSM, существенно различаются. В приложениях представлены новые алгоритмы нахождения точных значений скалярных однопетлевых интегралов 'т Хоофта—Велтмана—Пассарино.

## Введение

В настоящей работе проанализирован процесс парного рождения нейтральных бозонов Хиггса на примере реакции  $gg \rightarrow h_1 h_1$ . При этом рассматривались ведущие однопетлевые вклады  $b$  и  $t$  кварков. Интерес к данному процессу обусловлен возможностью определения

<sup>1</sup> Долгополов Михаил Вячеславович ([dolg@ssu.samara.ru](mailto:dolg@ssu.samara.ru)), Филиппов Юрий Петрович ([yufilberg@pochtamt.ru](mailto:yufilberg@pochtamt.ru)), кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

<sup>2</sup> Дубинин Михаил Николаевич ([dubinin@theory.sinp.msu.ru](mailto:dubinin@theory.sinp.msu.ru)), Институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119992, Москва, Воробьевы горы.

<sup>3</sup> Смирнов Илья Алексеевич ([ismi@pochtamt.ru](mailto:ismi@pochtamt.ru)), кафедра безопасности информационных систем Самарского государственного университета.

константы самодействия бозонов Хиггса путем сопоставления ожидаемых экспериментальных данных коллайдера LHC (CERN) с теоретическими предсказаниями. Кроме того, на примере данного процесса можно определить, как повлияет на сечение введение нетривиальной фазы, формализующей  $CP$  нарушение. В связи с этим полученные результаты удобно представить в виде отношения дифференциальных сечений, полученных в рамках моделей THDM (с  $CP$  нарушением) [1, 2] и MSSM (без  $CP$  нарушения) [3, 4, 5].

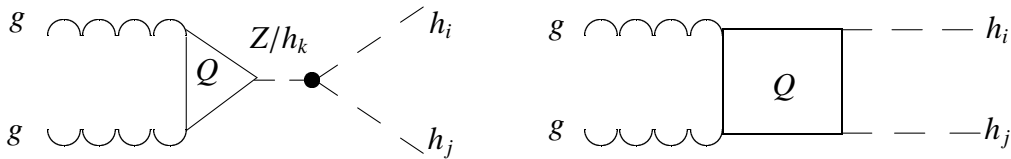
Статья имеет следующую структуру. Раздел 1 посвящен представлению аналитического выражения дифференциального сечения процесса рождения хиггсовских бозонов. Общий вид данного выражения, полученный на основании [5], содержится в пункте 1.1, в то время как пункт 1.2 посвящен конкретизации обобщенного дифференциального сечения на случай рождения двух легчайших бозонов Хиггса. В разделе 2 представлена зависимость от параметров используемой модели. В заключении приведен краткий анализ полученных результатов. Приложения содержат новый алгоритм нахождения точных значений скалярных однопетлевых интегралов 'т Хоофта—Велтмана—Пассарино, введенных в работах [6, 7], на основании которых были получены численные результаты, представленные в данной работе. Алгоритм основан на методе ветвления, т. е. представлении вычисления интеграла в общем случае в виде совокупности всех возможных частных случаев.

## 1. Дифференциальное сечение парного рождения бозонов Хиггса

### 1.1. Общий случай

Бозоны Хиггса  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), образующие хиггсовский сектор модели THDM, получены в результате ортогонального преобразования  $h, H, A$  модели MSSM и диагонализации хиггсовского потенциала в локальном минимуме [2]. Причем в предельном случае  $CP$  сохранения справедливы следующие соотношения:  $m_{h_1} \rightarrow m_h$ ,  $m_{h_2} \rightarrow m_H$ ,  $m_{h_3} \rightarrow m_A$ , где  $h$  — легчайший бозон Хиггса в модели MSSM.

Процесс  $gg \rightarrow h_i h_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) на языке диаграмм Фейнмана может быть представлен следующим образом:



Здесь под  $Q$  следует понимать  $t$  и  $b$  кварки. Ведущее приближение дифференциального сечения данного процесса, содержащее  $t$  и  $b$  кварковые петли, можно записать в виде [5]

$$\frac{d\hat{\sigma}(gg \rightarrow h_i h_j)}{d\hat{t}} = \frac{G_F^2 \alpha_s^2}{256(2\pi)^3} \left\{ \left| \sum_{Q=t,b} (C_\Delta \mathcal{F}_\Delta + C_\square \mathcal{F}_\square) \right|^2 + \left| \sum_{Q=t,b} C_\square \mathcal{G}_\square \right|^2 \right\}, \quad (1)$$

где  $\hat{t}$  — это импульс, передаваемый от одного из глюонов в начальном состоянии одному из бозонов Хиггса в конечном состоянии.

Вклад от треугольной диаграммы, где бозоны  $h_k$  и  $Z$  являются виртуальными частицами (суммарный импульс глюонов в начальном состоянии  $S_z = 0$ ):

$$C_\Delta \mathcal{F}_\Delta = \sum_{k=1}^3 (C_{\Delta S}^{h_k h_i h_j} \mathcal{A}_\Delta^{h_k}(\tau_Q) + C_{\Delta P}^{h_k h_i h_j} \mathcal{B}_\Delta^{h_k}(\tau_Q)) + C_\Delta^{Zh_i h_j} \mathcal{F}_\Delta^Z,$$

причем константы  $C_{\Delta\{S;P\}}^{h_k h_i h_j}$ ,  $C_\Delta^{Zh_i h_j}$  имеют следующий вид:

$$C_{\Delta\{S;P\}}^{h_k h_i h_j} = \lambda_{h_k h_i h_j} \frac{m_Z^2}{\hat{s} - m_{h_k}^2 + i m_{h_k} \Gamma_{h_k}} \{S; P\}_Q^{h_k}, \quad C_\Delta^{Zh_i h_j} = \lambda_{Zh_i h_j} \frac{m_Z^2}{\hat{s} - m_Z^2 + i m_Z \Gamma_Z} g_Q^Z.$$

Здесь  $\lambda_{h_k h_i h_j}$ ,  $\lambda_{Zh_i h_j}$  — коэффициенты при вершинах  $h_k h_i h_j$  и  $Z h_i h_j$ ;  $\hat{s}$  — квадрат инвариантной энергии;  $\alpha_s$  — постоянная тонкой структуры;  $G_F$  — константа Ферми;  $\Gamma_{h_k}$  и  $\Gamma_Z$  — соответствующие ширины распадов бозонов  $h_k$  и  $Z$ ;  $g_Q^Z = 1(-1)$  для  $t$  ( $b$ ) кварка;  $S_Q^{h_k}$ ,  $P_Q^{h_k}$  — соответственно скалярные и псевдоскалярные части констант тройного взаимодействия бозона  $h_k$  с кварками  $Q$  [2, 8].

Формфакторы, обусловленные однопетлевыми вкладами:

$$\mathcal{F}_\Delta^Z = \left(1 - \frac{\hat{s}}{m_Z^2}\right) \frac{\rho_i - \rho_j}{S} [1 - \tau_Q f(\tau_Q)],$$

$$\mathcal{A}_Q^{h_i}(\tau_Q) = \tau_Q [1 + (1 - \tau_Q) f(\tau_Q)], \quad \mathcal{B}_Q^{h_i}(\tau_Q) = \tau_Q f(\tau_Q), \quad (2)$$

зависят от масштабного параметра  $\tau_Q = 4m_Q^2/\hat{s}$ ,

$$f(\tau_Q) = \begin{cases} \arcsin^2 \frac{1}{\sqrt{\tau_Q}}, & \tau_Q \geq 1, \\ -\frac{1}{4} \left[ \log \frac{1 + \sqrt{1 - \tau_Q}}{1 - \sqrt{1 - \tau_Q}} - i\pi \right]^2, & \tau_Q < 1. \end{cases}$$

Петлевые вклады диаграммы типа "бокс" ( $S_z = 0$ ) можно представить в виде

$$C_\square \mathcal{F}_\square = S_Q^{h_i} S_Q^{h_j} C_{\mathcal{F}}^{ij}(\tau_Q) + S_Q^{h_i} P_Q^{h_j} D_{\mathcal{F}}^{ij}(\tau_Q) + P_Q^{h_i} S_Q^{h_j} E_{\mathcal{F}}^{ij}(\tau_Q) + P_Q^{h_i} P_Q^{h_j} F_{\mathcal{F}}^{ij}(\tau_Q),$$

где формфакторы определяются следующим образом:

$$C_{\mathcal{F}}^{ij} = \frac{1}{S^2} \left\{ 4S + 8S m_Q^2 C_{ab} - 2S(S + \rho_i + \rho_j - 8) m_Q^4 (D_{abi} + D_{bai} + D_{aib}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (\rho_i + \rho_j - 8)m_Q^2 \left[ T_1 C_{ai} + U_1 C_{bi} + U_2 C_{aj} + T_2 C_{bj} - (TU - \rho_i \rho_j) m_Q^2 D_{aib} \right] \Big\}, \\
D_{\mathcal{F}}^{ij} = & \frac{1}{S^2} \left\{ -2S(S + \rho_i - \rho_j) m_Q^4 (D_{abi} + D_{bai} + D_{aib}) + \right. \\
& \left. + (\rho_i - \rho_j) m_Q^2 \left[ T_1 C_{ai} + U_1 C_{bi} + U_2 C_{aj} + T_2 C_{bj} - (TU - \rho_i \rho_j) m_Q^2 D_{aib} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$E_{\mathcal{F}}^{ij} = D_{\mathcal{F}}^{ji},$$

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{F}}^{ij} = & \frac{1}{S^2} \left\{ 4S + 8S m_Q^2 C_{ab} - 2S(T + U) m_Q^4 (D_{abi} + D_{bai} + D_{aib}) + \right. \\
& \left. + (\rho_i + \rho_j) m_Q^2 \left[ T_1 C_{ai} + U_1 C_{bi} + U_2 C_{aj} + T_2 C_{bj} - (TU - \rho_i \rho_j) m_Q^2 D_{aib} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

В данных выражениях используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\hat{s} &= (p_a + p_b)^2, \quad \hat{t} = (p_i - p_a)^2, \quad \hat{u} = (p_i - p_b)^2, \\
S &= \hat{s}/m_Q^2, \quad T = \hat{t}/m_Q^2, \quad U = \hat{u}/m_Q^2, \quad \rho_i = m_{h_i}^2/m_Q^2, \quad \rho_j = m_{h_j}^2/m_Q^2, \\
T_1 &= T - \rho_i, \quad U_1 = U - \rho_i, \quad T_2 = T - \rho_j, \quad U_2 = U - \rho_j.
\end{aligned}$$

Петлевые вклады диаграммы типа "бокс" ( $S_z = 2$ ) имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
C_{\square\mathcal{G}\square} &= S_Q^{h_i} S_Q^{h_j} C_{\mathcal{G}}^{ij}(\tau_Q) + S_Q^{h_i} P_Q^{h_j} D_{\mathcal{G}}^{ij}(\tau_Q) + P_Q^{h_i} S_Q^{h_j} E_{\mathcal{G}}^{ij}(\tau_Q) + P_Q^{h_i} P_Q^{h_j} F_{\mathcal{G}}^{ij}(\tau_Q), \\
C_{\mathcal{G}}^{ij} &= \left\{ (T^2 + \rho_i \rho_j - 8T) m_Q^2 \left[ S C_{ab} + T_1 C_{ai} + T_2 C_{bj} - S T m_Q^2 D_{bai} \right] + \right. \\
& \quad + (U^2 + \rho_i \rho_j - 8U) m_Q^2 \left[ S C_{ab} + U_1 C_{bi} + U_2 C_{aj} - S U m_Q^2 D_{abi} \right] - \\
& \quad - (T^2 + U^2 - 2\rho_i \rho_j)(T + U - 8) m_Q^2 C_{ij} - \\
& \quad \left. - 2(T + U - 8)(TU - \rho_i \rho_j) m_Q^4 (D_{abi} + D_{bai} + D_{aib}) \right\} / S(TU - \rho_i \rho_j), \\
D_{\mathcal{G}}^{ij} &= \left\{ (U^2 - \rho_i \rho_j) m_Q^2 \left[ S C_{ab} + U_1 C_{bi} + U_2 C_{aj} - S U m_Q^2 D_{abi} \right] - \right. \\
& \quad - (T^2 - \rho_i \rho_j) m_Q^2 \left[ S C_{ab} + T_1 C_{ai} + T_2 C_{bj} - S T m_Q^2 D_{bai} \right] + \\
& \quad + \left[ (T + U)^2 - 4\rho_i \rho_j \right] (T - U) m_Q^2 C_{ij} + \\
& \quad \left. + 2(T - U)(TU - \rho_i \rho_j) m_Q^4 (D_{abi} + D_{bai} + D_{aib}) \right\} / S(TU - \rho_i \rho_j), \\
E_{\mathcal{G}}^{ij} &= D_{\mathcal{G}}^{ji},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{G}}^{ij} &= \left\{ (T^2 + \rho_i \rho_j) m_Q^2 \left[ S C_{ab} + T_1 C_{ai} + T_2 C_{bj} - S T m_Q^2 D_{bai} \right] + \right. \\
& \quad + (U^2 + \rho_i \rho_j) m_Q^2 \left[ S C_{ab} + U_1 C_{bi} + U_2 C_{aj} - S U m_Q^2 D_{abi} \right] - \\
& \quad - (T^2 + U^2 - 2\rho_i \rho_j)(T + U) m_Q^2 C_{ij} - \\
& \quad \left. - 2(T + U)(TU - \rho_i \rho_j) m_Q^4 (D_{abi} + D_{bai} + D_{aib}) \right\} / S(TU - \rho_i \rho_j).
\end{aligned}$$

## 1.2. Процесс $gg \rightarrow h_1 h_1$

Дифференциальное сечение процесса  $gg \rightarrow h_1 h_1$ , где виртуальный  $h_2$  бозон лежит почти на массовой поверхности, можно представить в виде обобщенной формулы (1), причем индексы, нумерующие бозоны Хиггса,  $i = j = 1$ . Выражения для масс хиггсовских бозонов и констант их взаимодействия с тяжелыми кварками представлены в работе [2]. Кинематика процесса такова, что  $\hat{s} = 4m_{h_1}^2$ ,  $\hat{t} = \hat{u} = -m_{h_1}^2$ . При вычислении используется режим расщепления (decoupling) [9], согласно которому масса легчайшего бозона Хиггса в модели THDM  $h_1$  много меньше масс  $h_2$  и  $h_3$ , тогда выражения для формфакторов (2) можно записать в виде:

$$\mathcal{A}_{\Delta}^{h_2}(\tau_Q) = \frac{4m_Q^2}{m_{h_1}^2} \left( 1 - \frac{1}{4} \ln^2 \left( \frac{m_{h_1}^2}{m_Q^2} \right) \right) + \mathcal{O} \left( (4m_Q^2/m_h^2)^2 \right),$$

$$\mathcal{B}_{\Delta}^{h_2}(\tau_Q) = -\frac{m_Q^2}{m_{h_1}^2} \ln^2 \left( \frac{m_{h_1}^2}{m_Q^2} \right) + \mathcal{O} \left( (4m_Q^2/m_h^2)^2 \right).$$

При этом использовались точные выражения скалярных однопетлевых интегралов С- и D-типа [6, 7] (см. приложения).

## 2. Зависимость от параметров

В расчетах рассматривались следующие значения параметров. Трилинейные константы взаимодействия в скалярном секторе  $|A_i| = |A_b| = 1$  ТэВ, масса А-бозона  $m_A = 0,5$  ТэВ, массы бозонов Хиггса  $m_{h_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , выражались через свободные параметры [2]. Аналитические выражения констант  $\lambda_i$ ,  $i = 5, 6, 7$ , содержащиеся в потенциале Хиггса модели THDM, представлены в [1, 8].

В результате проведенных вычислений были построены графические зависимости отношений дифференциальных сечений, полученных в рамках моделей THDM и MSSM, от фазы  $\varphi = \arg(\mu A_{(t,b)})$  и  $\mu$ , массового параметра хиггсино. Анализ данных зависимостей показывает, что при небольших значениях  $\text{tg } \beta = 3$  с ростом параметра  $\mu$  наблюдается существенное подавление дифференциального сечения, полученного в рамках THDM, в то время как при больших  $\text{tg } \beta = 40$  данное сечение растет. Кроме того, как следует из рис. 5, 6, максимальное значение дифференциального сечения, обусловленного моделью THDM, достигается при больших значениях  $\text{tg } \beta = 40$  и может превосходить при определенном наборе параметров соответствующее сечение, полученное в рамках MSSM, в 4,5 раза.

## Заключение

Полученные результаты удобно проиллюстрировать графически. На рис. 1, 2 представлены зависимости дифференциального сечения рассеяния  $gg \rightarrow h_1 h_1$  в модели THDM от фазы  $\varphi$  при фиксированных значениях свободных параметров модели. На рис. 3–8 представлены зависимости отношения дифференциального сечения рассеяния  $gg \rightarrow h_1 h_1$  в модели THDM к соответствующему дифференциальному сечению в модели MSSM от фазы  $\varphi$  и  $\mu$ . Как следует из рис. 1, 2, вклад в дифференциальное сечение процесса парного рождения легчайших хиггсовских бозонов от треугольной диаграммы пренебрежимо мал по сравнению со вкладом от диаграммы типа "бокс", что приводит к трудностям точного определения константы самодействия трех хиггсовских бозонов.

В дальнейшем планируется перейти от дифференциального к полному сечению, что позволит впоследствии сравнить полученные нами выражения с результатами, представленными в [10] в области изменения параметров, соответствующей сценарию *CPX*.

Работа М.Н. Дубинина была поддержана грантами РФФИ 01-02-16710 и INTAS 00-0313, 00-0679.

## Литература

- [1] Pilaftsis A., Wagner C.E.M. Higgs bosons in the minimal supersymmetric standard model // Nucl.Phys. B553, 1999. P. 3;  
Carena M., Ellis J., Pilaftsis A. et al. Renormalization-group-improved effective potential for the MSSM Higgs sector with explicit *CP* violation // Nucl.Phys. B586, 2000. P. 92;  
Carena M., Ellis J., Pilaftsis A. et al. Higgs boson pole masses in the MSSM with explicit *CP* violation // Nucl.Phys. B625, 2002. P. 345;
- [2] Dubinin M.N., Semenov A.V. Triple and Quartic Interactions of Higgs Bosons in the Two-Higgs-Doublet Model with *CP*-Violation // Eur.J.Phys. 2003. V. C28. P. 223–236.
- [3] Nilles H.P. Supersymmetry, supergravity and particle physics // Phys.Rept. 110, 1984. P. 1;  
Haber H.E., Kane G.L. Phys.Rept. 117, 1985. P. 75.
- [4] Gunion J., Haber H., Kane G. et al. The Higgs hunter's guide. Addison-Wesley, 1990. P. 195.
- [5] Plehn T., Spira M., Zerwas P.M. Pair Production of Neutral Higgs Particles in Gluon-Gluon Collisions // Nucl.Phys. B479, 1996. P. 46. Erratum — ibid. B531, 1998. P. 655.

- [6] 't Hooft G., Veltman M.J.G. Scalar one loop integrals // Nucl.Phys. 1979. B153. P. 365–401;  
 Passarino G., Veltman M.J.G. One loop corrections for  $e^+e^-$  annihilation into  $\mu^+\mu^-$  in the Weinberg model // Nucl.Phys. 1979. B.160. P. 151.
- [7] van Oldenborgh G.J., Vermaseren J.A.M. New Algorithms for One-Loop Integrals. NIKHEF-H/89-17. 25 pp.
- [8] Ахметзянова Э.Н., Долгополов М.В., Дубинин М.Н. и др. Суперсимметричная модель с нарушением  $CP$  инвариантности. 1. Распады бозона Хиггса  $h \rightarrow gg$  и  $h \rightarrow \gamma\gamma$  // Вестник СамГУ. 2003. № 2(28). С. 122–136.
- [9] Gunion J.F., Haber H.E. The  $CP$ -conserving two-Higgs-doublet model: the approach to the decoupling limit // Phys.Rev. D67:075019. 2003.
- [10] Carena M., Ellis J., Mrenna S. et al. Collider Probes of the MSSM Higgs Sector with Explicit  $CP$  Violation // E-preprint hep-ph/0211467. 2002. 42 pp.
- [11] Devidze G.G., Jibuti G.R. The two and three point one loop functions // E-preprint hep-ph/9710283. 1997.

## Приложения

### А. Скалярная трехточечная функция 'т Хоофта—Велтмана—Пассарино. Вычисление методом ветвления

Алгоритм вычисления скалярного интеграла основан на результатах простого алгебраического анализа и удобен для построения программы численных вычислений. Программа протестирована на ряде частных случаев, интересных для квантовополевых вычислений, представленных в работах [6, 11]. Результаты данной программы согласуются с результатами указанных работ.

Скалярная трехточечная функция 'т Хоофта—Велтмана—Пассарино  $C_0$  — это скалярный интеграл вида

$$\frac{i}{16\pi^2} C_0(k_1^2, k_2^2, k_1 k_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times \frac{1}{(q^2 - m_1^2 + i\epsilon)((q + k_1)^2 - m_2^2 + i\epsilon)((q + k_2)^2 - m_3^2 + i\epsilon)}. \quad (3)$$

Здесь представлен наиболее простой метод вычисления данного интеграла — метод ветвления. Суть данного метода — приведение исходного интеграла с помощью параметризации Фейнмана к двухкратному повторному интегралу и рассмотрение всевозможных ситуаций для

его вычисления численным способом (данный интеграл не приводится к элементарным функциям). Данный способ нахождения точных значений  $C_0$  интеграла численно согласуется с известными алгоритмами, впервые предложенными в работах [6].

Воспользуемся параметризацией Фейнмана следующего вида:

$$\frac{1}{A \cdot B \cdot C} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{[A(1-x-y) + Bx + Cy]^3}. \quad (4)$$

Отметим, что параметры  $A, B, C$  в общем случае должны быть комплексными, чтобы избежать ситуаций с сингулярностями в пространстве 4-импульсов. Эта одна из причин, по которой мы вводим малую мнимую добавку  $\epsilon$  в выражении (3). Воспользуемся выражением (4) и в результате получаем следующее выражение:

$$\frac{i}{16\pi^2} C_0(k_1^2, k_2^2, k_1 k_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times \quad (5)$$

$$\times \frac{1}{[(q^2 - m_1^2 + i\epsilon)(1-x-y) + x((q+k_1)^2 - m_2^2 + i\epsilon) + y((q+k_2)^2 - m_3^2 + i\epsilon)]^3}.$$

Преобразуем знаменатель подынтегрального выражения и произведем следующую замену:

$$q' = q + k_1 x + k_2 y,$$

$$M^2 = k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + 2k_1 k_2 xy - k_1^2 x - k_2^2 y + m_2^2 x + m_3^2 y + m_1^2(1-x-y) + i\epsilon,$$

следовательно, выражение (5) может быть представлено в следующей форме:

$$\frac{i}{16\pi^2} C_0(k_1^2, k_2^2, k_1 k_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q'^2 - M^2]^3}.$$

Перейдем из четырехмерного пространства Минковского в четырехмерное евклидово пространство посредством следующей замены:

$$q'_0 \rightarrow i q_{E0}, \quad \vec{q}'^2 \rightarrow \vec{q}_E^2, \quad q'^2 \rightarrow -q_E^2, \quad d^4 q' \rightarrow i d^4 q_E,$$

воспользуемся соотношением вида (в нашем случае  $D = 4, n = 3$ )

$$\int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q_E^2 + M^2]^n} = \pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} (M^2)^{-n+D/2};$$

в результате получаем

$$C_0(k_1^2, k_2^2, k_1 k_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{M^2}.$$

Представим  $M^2$  следующим образом:

$$M^2 = ay^2 + b(x)y + c(x),$$



где

$$\begin{aligned} a &= k_2^2, \\ b(x) &= 2k_1k_2x + m_3^2 - k_2^2 - m_1^2, \\ c(x) &= k_1^2x^2 - k_1^2x + m_1^2(1-x) + m_2^2x, \end{aligned}$$

и введем новую функцию  $D_1(x)$  (дискриминант уравнения  $M^2(y) = 0$ ):

$$D_1(x) = b(x)^2 - 4ac(x) = \eta x^2 + \alpha x + \beta,$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= 4((k_1k_2)^2 - k_1^2k_2^2), \\ \alpha &= 4(k_1k_2)(m_3^2 - k_2^2 - m_1^2) + 4k_2^2(m_1^2 + k_1^2 - m_2^2), \\ \beta &= m_1^4 + m_3^4 + k_2^4 - 2m_3^2k_2^2 - 2m_3^2m_1^2 - 2m_1^2k_2^2. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в зависимости от поведения функции  $D_1(x)$  внутренний интеграл будет иметь различные первообразные. Поэтому следующий этап задачи — анализ поведения функции  $D_1(x)$  с допустимыми значениями параметров данной задачи.

**A1. Случай  $a \neq 0$ ;  $b(x), c(x) \in \mathbb{R}$**

**Сектор 1:**  $\eta \neq 0, \alpha, \beta$  — любые конечные действительные числа. Для исследования поведения функции  $D_1(x)$  на отрезке  $[0, 1]$  необходимо определить функцию параметров задачи  $D_2$ :

$$D_2 = \alpha^2 - 4\eta\beta.$$

Уравнение  $D_1(x) = 0$  является квадратным уравнением по переменной  $x$ , следовательно, существуют два корня уравнения:

$$x_{01,2} = -\frac{\alpha}{2\eta} \mp \frac{1}{2\eta} \sqrt{D_2},$$

и эти корни могут располагаться различным образом по отношению к указанному отрезку.

**Ситуация 1:**  $x_{01}, x_{02}$  принадлежат отрезку  $[0, 1]$ , при этом  $x_{01} < x_{02}$ :

$$\text{а-случай} \left\{ \begin{array}{l} D_1(x) \geq 0 \text{ при } x \in [0, x_{01}] \cup [x_{02}, 1], \\ \text{здесь } l_1 = 0, l_2 = x_{01}, l_3 = x_{02}, l_4 = 1, \\ D_1(x) < 0 \text{ при } x \in (x_{01}, x_{02}), \\ \text{здесь } l_5 = x_{01}, l_6 = x_{02}; \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\text{б-случай} \left\{ \begin{array}{l} D_1(x) \geq 0 \text{ при } x \in [x_{01}, x_{02}], \\ \text{здесь } l_1 = x_{01}, l_2 = x_{02}, \\ D_1(x) < 0 \text{ при } x \in [0, x_{01}) \cup (x_{02}, 1], \\ \text{здесь } l_5 = 0, l_6 = x_{01}, l_7 = x_{02}, l_8 = 1; \end{array} \right. \quad (7)$$

при  $x_{02} < x_{01}$  получаем аналогичные результаты: в (6), (7) следует лишь произвести замену  $x_{01} \leftrightarrow x_{02}$ .

**Ситуация 2:** *один из  $x_{01}, x_{02}$  принадлежит отрезку  $[0, 1]$ :*

$$\begin{aligned} \text{а-случай} & \left\{ \begin{array}{l} D_1(x) \geq 0 \text{ при } x \in [0, \{x_{01}, x_{02}\}], \\ \text{здесь } l_1 = 0, l_2 = \{x_{01}, x_{02}\}, \\ D_1(x) < 0 \text{ при } x \in [\{x_{01}, x_{02}\}, 1], \\ \text{здесь } l_5 = \{x_{01}, x_{02}\}, l_6 = 1; \end{array} \right. \\ \text{б-случай} & \left\{ \begin{array}{l} D_1(x) \geq 0 \text{ при } x \in [\{x_{01}, x_{02}\}, 1], \\ \text{здесь } l_1 = \{x_{01}, x_{02}\}, l_2 = 1, \\ D_1(x) < 0 \text{ при } x \in [0, \{x_{01}, x_{02}\}), \\ \text{здесь } l_5 = 0, l_6 = \{x_{01}, x_{02}\}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

**Ситуация 3:** *ни один из  $x_{01}, x_{02}$  не принадлежит отрезку  $[0, 1]$ :*

$$\begin{aligned} \text{а-случай} & \left\{ \begin{array}{l} D_1(x) > 0 \text{ при } x \in [0, 1], \\ \text{здесь } l_1 = 0, l_2 = 1, \\ D_1(x) < 0 \text{ ни при каких } x, \\ \text{здесь } l_5 = 0, l_6 = 0; \end{array} \right. \\ \text{б-случай} & \left\{ \begin{array}{l} D_1(x) \geq 0 \text{ ни при каких } x, \\ \text{здесь } l_1 = 0, l_2 = 0, \\ D_1(x) < 0 \text{ при } x \in [0, 1], \\ \text{здесь } l_5 = 0, l_6 = 1. \end{array} \right. \end{aligned}$$

**Сектор 2:**  $\eta = 0$ ,  $\alpha, \beta$  — любые конечные действительные числа, одновременно неравные нулю.

В данном случае  $D_1(x)$  есть линейная функция относительно переменной  $x$ , и мы имеем один вещественный корень  $x_0 = -\beta/\alpha$ .

**Ситуация 1:**  $x_0$  принадлежит отрезку  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \text{а-случай} & \left\{ \begin{array}{l} D_1(x) \geq 0 \text{ при } x \in [0, x_0], \\ \text{здесь } l_1 = 0, l_2 = x_0, \\ D_1(x) < 0 \text{ при } x \in (x_0, 1], \\ \text{здесь } l_5 = x_0, l_6 = 1; \end{array} \right. \\ \text{б-случай} & \left\{ \begin{array}{l} D_1(x) \geq 0 \text{ при } x \in [x_0, 1], \\ \text{здесь } l_1 = x_0, l_2 = 1, \\ D_1(x) < 0 \text{ при } x \in [0, x_0), \\ \text{здесь } l_5 = 0, l_6 = x_0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

**Ситуация 2:**  $x_0$  не принадлежит отрезку  $[0, 1]$ :

$$\text{а-случай} \left\{ \begin{array}{l} D_1(x) > 0 \text{ при } x \in [0, 1], \\ \text{здесь } l_1 = 0, l_2 = 1, \\ D_1(x) < 0 \text{ ни при каких } x, \\ \text{здесь } l_5 = 0, l_6 = 0; \end{array} \right.$$

$$\text{b-случай} \begin{cases} D_1(x) > 0 \text{ ни при каких } x, \\ \text{здесь } l_1 = 0, l_2 = 0, \\ D_1(x) < 0 \text{ при } x \in [0, 1], \\ \text{здесь } l_5 = 0, l_6 = 1. \end{cases}$$

**Сектор 3:**  $\eta = \alpha = \beta = 0$ .

В данном случае  $D_1(x) = 0$  для любого  $x$ , принадлежащего отрезку  $[0, 1]$ .

Рассмотрим возможные варианты редукции данного интеграла.

**Вариант 1:**  $D_1(x) > 0$  при  $x \in [l_1, l_2] \cup [l_3, l_4]$ . В данном случае имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^2} &= \frac{1}{a(y - y_{01}(x))(y - y_{02}(x))} = \\ &= \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{(y_{01}(x) - y_{02}(x))(y - y_{01}(x))} - \frac{1}{(y_{01}(x) - y_{02}(x))(y - y_{02}(x))} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{D_1(x)}} \left[ \frac{1}{(y - y_{01}(x))} - \frac{1}{(y - y_{02}(x))} \right]. \end{aligned}$$

При выводе окончательного результата был использован метод неопределенных коэффициентов для разбиения исходной дроби на простейшие, а также было учтено, что

$$\begin{aligned} y_{01}(x) &= -\frac{b(x)}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{D_1(x)}, \\ y_{02}(x) &= -\frac{b(x)}{2a} - \frac{1}{2a} \sqrt{D_1(x)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} C_{011}(k_1^2, k_2^2, k_1 k_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= -\left( \int_{l_1}^{l_2} + \int_{l_3}^{l_4} \right) dx \times \\ &\times \int_0^{1-x} \frac{dy}{\sqrt{D_1(x)}} \left[ \frac{1}{(y - y_{01}(x))} - \frac{1}{(y - y_{02}(x))} \right] = \\ &= -\left( \int_{l_1}^{l_2} + \int_{l_3}^{l_4} \right) \frac{dx}{\sqrt{D_1(x)}} \times \\ &\times [\ln |1 - x - y_{01}(x)| - \ln |y_{01}(x)| - \ln |1 - x - y_{02}(x)| + \ln |y_{02}(x)|]. \end{aligned}$$

**Вариант 2:**  $D_1(x) < 0$  при  $x \in [l_5, l_6] \cup [l_7, l_8]$ .

$$\frac{1}{M^2} = \frac{1}{a} \left[ \left( y + \frac{b(x)}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c(x)}{a} - \left( \frac{b(x)}{2a} \right)^2 \right) \right]^{-1} = \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{y'^2 + A(x)^2} \right],$$

где

$$y' = y + \frac{b(x)}{2a}, \quad A(x) = \frac{1}{2a} \sqrt{-D_1(x)},$$

$$\begin{aligned}
C_{012}(k_1^2, k_2^2, k_1 k_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= - \left( \int_{l_5}^{l_6} + \int_{l_7}^{l_8} \right) dx \times \\
&\times \int_{\frac{b(x)}{2a}}^{1-x+\frac{b(x)}{2a}} \frac{dy'}{a} \left[ \frac{1}{y'^2 + A(x)^2} \right] = \\
&= - \left( \int_{l_5}^{l_6} + \int_{l_7}^{l_8} \right) \frac{2dx}{\sqrt{-D_1(x)}} \times \\
&\times \left[ \operatorname{arctg} \left[ \frac{2a(1-x) + b(x)}{\sqrt{-D_1(x)}} \right] - \operatorname{arctg} \left[ \frac{b(x)}{\sqrt{-D_1(x)}} \right] \right].
\end{aligned}$$

**Вариант 3:**  $D_1(x) = 0$  при  $\eta = \alpha = \beta = 0$ . В данном случае интеграл принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
C_{013}(k_1^2, k_2^2, k_1 k_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{a} \frac{1}{[y - y_0(x)]^2} = \\
&= \frac{1}{a} \int_0^1 dx \left( \frac{1}{1-x-y_0(x)} + \frac{1}{y_0(x)} \right) = \frac{1}{a} \left[ \int_0^1 \frac{dx}{\omega_1 x + \lambda_1} + \int_0^1 \frac{dx}{\omega_2 x + \lambda_2} \right] = \\
&= \frac{1}{a} (Dr(\omega_1, \lambda_1) - Dr(\omega_2, \lambda_2)),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \frac{k_1 k_2}{k_2^2}, \quad \lambda_2 = \frac{m_3^2 - m_1^2}{2k_2^2} - \frac{1}{2}, \\
\omega_1 &= \omega_2 - 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 + 1, \quad y_0(x) = -\frac{b(x)}{2a},
\end{aligned}$$

$$Dr(\omega, \lambda) = \int_0^1 \frac{1}{\omega x + \lambda} = \begin{cases} \frac{1}{\omega} \ln \left| \frac{\omega + \lambda}{\lambda} \right|, & \text{если } \omega \neq 0, \lambda \neq 0, \\ 1/\lambda, & \text{если } \omega = 0, \lambda \neq 0, \\ \infty, & \text{если } \omega \neq 0, \lambda = 0. \end{cases}$$

**A2. Случай**  $a = 0$ ,  $b(x) \neq 0$ ;  $c(x) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
C_{02}(k_1^2, k_2^2, k_1 k_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{b(x)y + c(x)} = \\
&= - \int_0^1 \frac{dx}{b(x)} [\ln |b(x)(1-x) + c(x)| - \ln |c(x)|].
\end{aligned}$$

**A3. Случай**  $a = 0$ ,  $b(x) \equiv 0$ ,  $c(x) \neq 0$

$$C_{03}(k_1^2, k_2^2, k_1 k_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{c(x)} = - \int_0^1 \frac{dx(1-x)}{c(x)}.$$

Подведем итог. Мы рассмотрели всевозможные ситуации с имеющимися параметрами и свели исходный интеграл к комбинациям одномерных интегралов. Некоторые из них могут быть посчитаны численно, другие могут быть доведены до аналитического результата. Итак,

$$C_{01}(k_1^2, k_2^2, k_1 k_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \begin{cases} D_1(x) \neq 0 \Rightarrow C_{011} + C_{012}, \\ D_1(x) = 0 \Rightarrow C_{013}. \end{cases}$$

$$C_0(k_1^2, k_2^2, k_1 k_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \begin{cases} a \neq 0, b(x), c(x) \text{ принимают любые} \\ \text{действительные значения} \Rightarrow C_{01}, \\ a = 0, b(x) \neq 0, c(x) \text{ принимает любые} \\ \text{действительные значения} \Rightarrow C_{02}, \\ a = 0, b(x) \equiv 0, c(x) \neq 0 \Rightarrow C_{03}. \end{cases}$$

### В. Скалярная четырехточечная функция 'т Хоффта—Велтмана—Пассарино

Скалярный интеграл

$$D_0(S_1, S_2, S_3, S_4) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz [x(S_1 - S_4) + y(S_2 - S_4) + z(S_3 - S_4) + S_4]^{-4}$$

можно представить в виде [7]

$$D_0(S_1, S_2, S_3, S_4) = \frac{A_1 A_2 A_3 A_4}{S_3'^2 - S_4'^2} (C_0(S_1', S_2', S_3') - C_0(S_1', S_2', S_4')),$$

где  $S'_i = A_i S_i$ ,  $C_0$  — скалярный интеграл вида:

$$C_0(S_1', S_2', S_i') = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[x(S_1' - S_i') + y(S_2' - S_i') + S_i']^2}.$$

Для определения  $A_i$  решается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} (S_3' - S_4')^2 = 0, \\ (S_2' - S_4')(S_3' - S_4') = 0, \\ (S_1' - S_4')(S_3' - S_4') = 0. \end{cases}$$

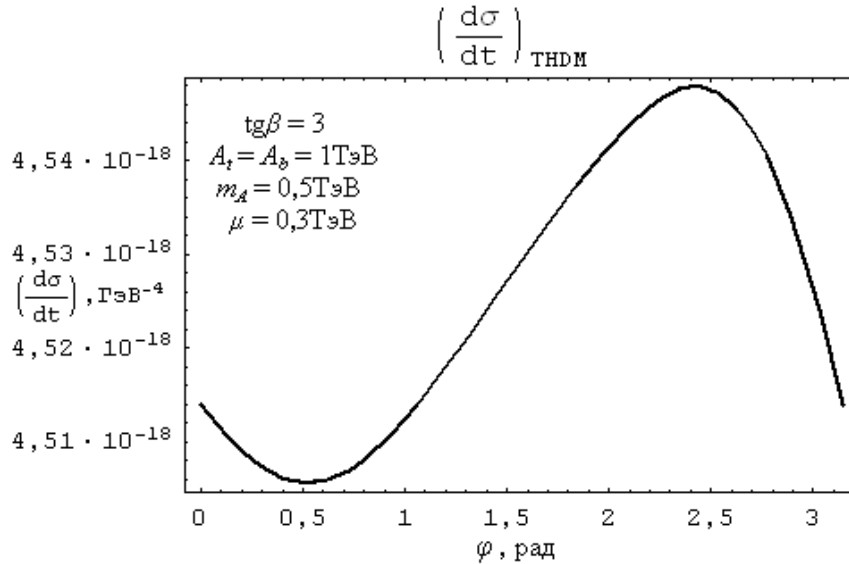


Рис. 1. Зависимость дифференциального сечения рассеяния  $gg \rightarrow h_1 h_1$  от фазы  $\varphi$  при значении  $\text{tg}\beta = 3$  (здесь и далее под  $\mu$  и  $A$  подразумеваются абсолютные величины)

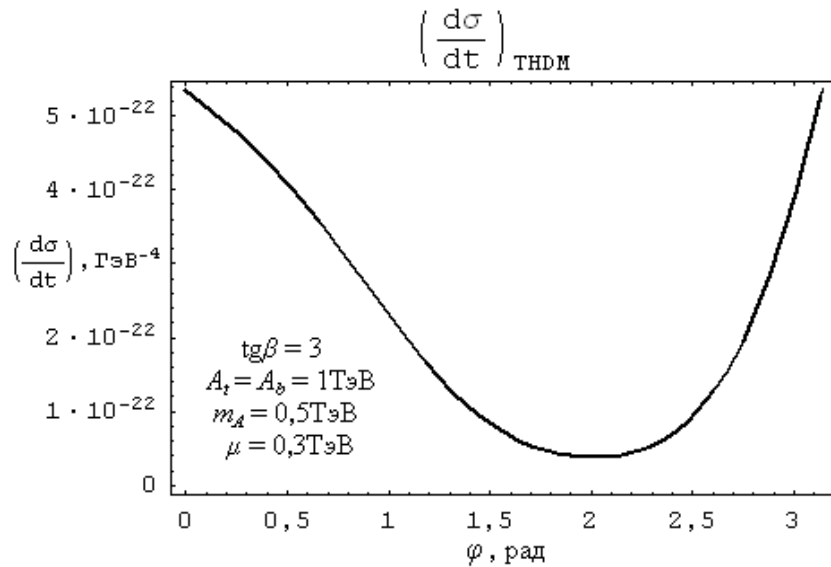


Рис. 2. Зависимость дифференциального сечения рассеяния  $gg \rightarrow h_1 h_1$ , обусловленного вкладом только треугольной диаграммы, от фазы  $\varphi$  при значении  $\text{tg}\beta = 3$

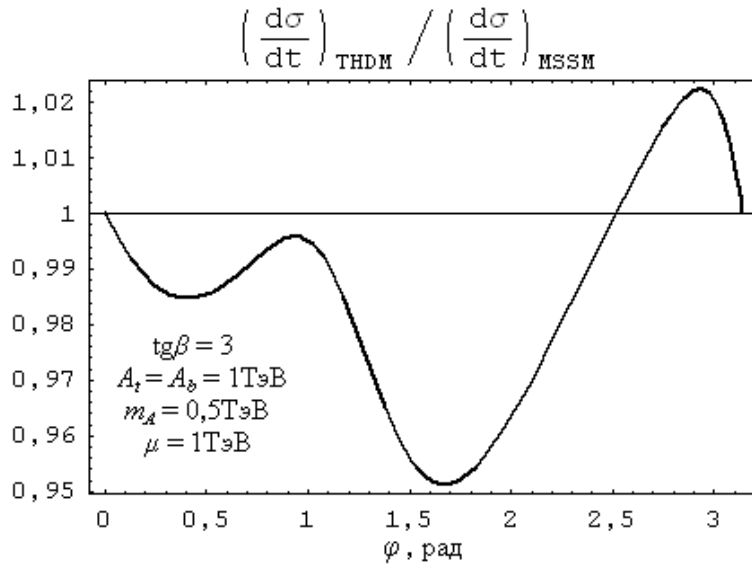


Рис. 3. Зависимость отношений дифференциальных сечений, полученных в рамках THDM и MSSM, от фазы  $\varphi$  при значениях  $\text{tg}\beta = 3$  и  $\mu = 1 \text{ ТэВ}$

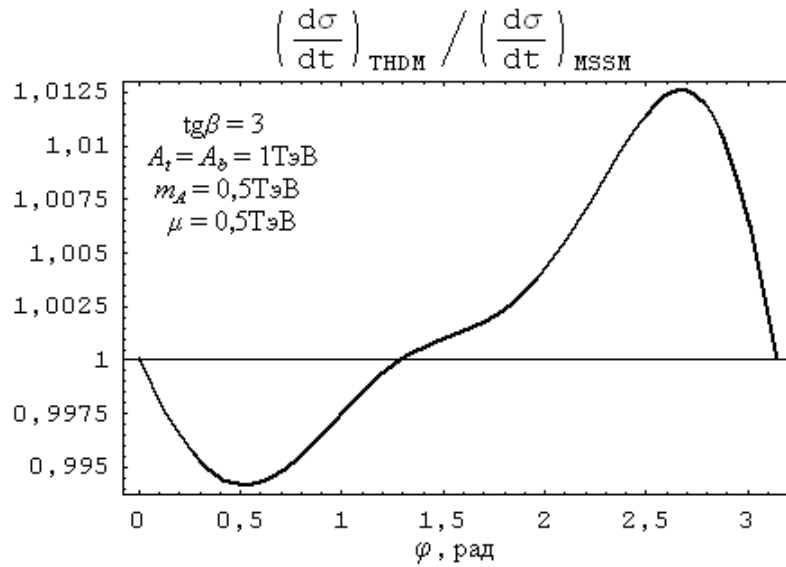


Рис. 4. Зависимость отношений дифференциальных сечений, полученных в рамках THDM и MSSM, от фазы  $\varphi$  при значениях  $\text{tg}\beta = 3$  и  $\mu = 0.5 \text{ ТэВ}$

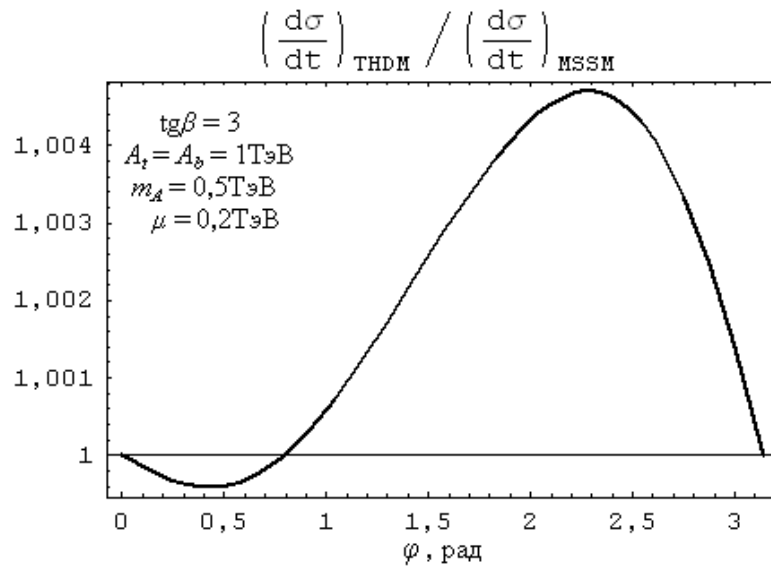


Рис. 5. Зависимость отношений дифференциальных сечений, полученных в рамках THDM и MSSM, от фазы  $\varphi$  при значениях  $\text{tg}\beta = 3$  и  $\mu = 0.2\text{ТэВ}$

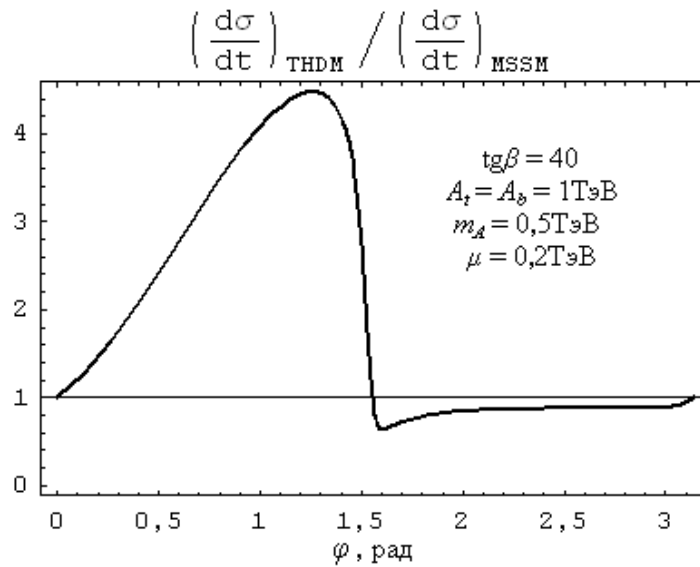


Рис. 6. Зависимость отношений дифференциальных сечений, полученных в рамках THDM и MSSM, от фазы  $\varphi$  при значениях  $\text{tg}\beta = 40$  и  $\mu = 0.2\text{ТэВ}$



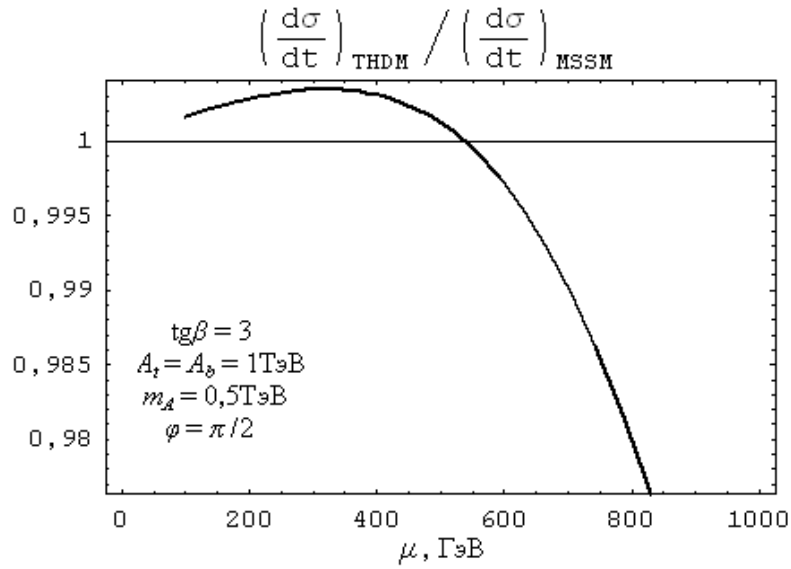


Рис. 7. Зависимость отношений дифференциальных сечений, полученных в рамках THDM и MSSM, от  $\mu$  при значениях  $\text{tg}\beta = 3$  и  $\varphi = \pi/2$

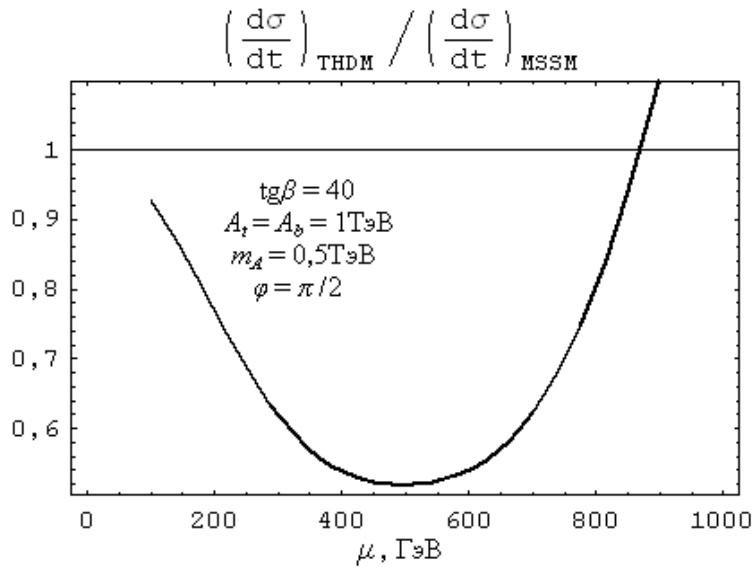


Рис. 8. Зависимость отношений дифференциальных сечений, полученных в рамках THDM и MSSM, от  $\mu$  при значениях  $\text{tg}\beta = 40$  и  $\varphi = \pi/2$

**SUPERSYMMETRIC MODEL  
WITH EXPLICIT  $CP$  VIOLATION.  
2. PAIR-PRODUCTION OF THE NEUTRAL  
HIGGS BOSONS AT LHC**

© 2003 M.V. Dolgopolov,<sup>4</sup> M.N. Dubinin,<sup>5</sup> I.A. Smirnov,<sup>6</sup>  
Yu.P. Philippov<sup>4</sup>

The cross sections of the lightest neutral Higgs bosons pair-production in the gluon-gluon collisions are calculated in the framework of the general two-Higgs-doublet model (THDM). Comparative analysis with the cross sections obtained in the minimal supersymmetric standard model (MSSM) is performed. It is shown that the values of differential cross sections calculated in THDM and MSSM are substantially different in some regions of the parameter space. The Appendix contains the new algorithms of calculation for Passarino–Veltman–’t Hooft scalar one-loop integrals which have been used for the evaluation of Higgs boson pair-production cross sections.

Поступила в редакцию 27/IV/2003;  
в окончательном варианте — 20/VI/2003.

---

<sup>4</sup> Dolgopolov Mikhail Vyacheslavovich ([dolg@ssu.samara.ru](mailto:dolg@ssu.samara.ru)), Philippov Yurii Petrovich ([yufilberg@pochtamt.ru](mailto:yufilberg@pochtamt.ru)), Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

<sup>5</sup> Dubinin Mikhail Nikolaevich ([dubinin@theory.sinp.msu.ru](mailto:dubinin@theory.sinp.msu.ru)), D.V. Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Moscow State University, Moscow, Vorobyevi Gory, 119992, Russia.

<sup>6</sup> Smirnov Илья Alekseevich ([ismi@pochtamt.ru](mailto:ismi@pochtamt.ru)) Dept. of Information Systems Security, Samara State University.